و ب

الاثنين 26/3/2018م — المحاضرة الثالثة -

العمليات على البيان graph :

لتكن لدينا $G_1(V,E)$, $G_2(V,E)$ بيانين .

نقول عن البيانين G_1 , G_2 أنهما منفصلين

اذا كان $V(G_1) \cap V(G_2) = \Phi$

أي لا يوجد بينهما رؤوس مشتركة .

ونقول عن البيانين G_1 , G_2 أنهما منفصلين بالنسبة للأضلاع اذا كان

$$E(G_1) \cap E(G_2) = \Phi$$

• اتحاد بيانين :

لتكن G_1 , G_2 بيانين نقول عن البيان G انه اتحاد للبيانين G_1 , G_2 ونكتب $G = G_1 \cup G_2$

هذا البيان له مجموعة الرؤوس

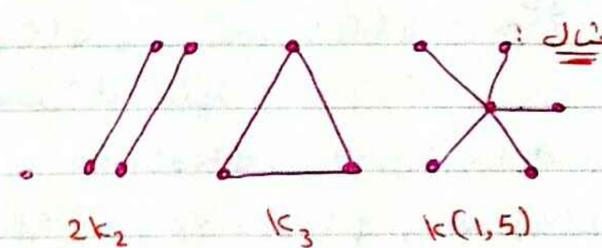
$$V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$$

أي تحمل الرؤوس المشتركة والغير مشتركة بين البيانين

ومجموعة الاضلاع

$$E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$$

مثال :



$$G = 3K_1 \cup 2K_2 \cup K_3 \cup K(1,5)$$

• ربط بيانين :

لتكن G_1 , G_2 بيانين نعرف عملية ربط البيانين G_1 , G_2 بالصيغة

$$G = G_1 + G_2$$

وهذا البيان له مجموعة الرؤوس

$$V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$$

ومجموعة الاضلاع

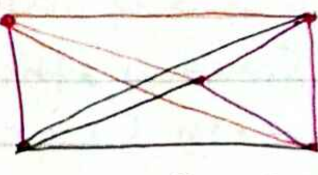
$$E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv ; u \in V(G_1) \text{ and } v \in V(G_2)\}$$

مثال :

G_1 G_2

مجموعة الرؤوس هي

مجموعة الاضلاع هي



$G_1 + G_2$

جمع اضلاع بيانين :

لتكن لدينا البيانين G_1 , G_2 بحيث أن

$V(G_1) = V(G_2)$ ومجموعة الاضلاع (لهما نفس مجموعة الرؤوس)

$E(G_1) \cap E(G_2) = \Phi$ (تقاطع = خالي)

عندئذ اجتماع بيانين معطى بالشكل

$$G = G_1 \oplus G_2$$

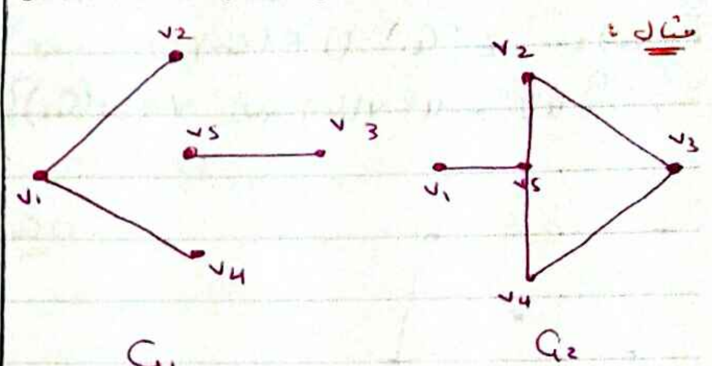
له مجموعة الرؤوس :

$V(G) = V(G_1) = V(G_2)$

مجموعة الأضلاع

$E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$

مثال:



أضلاع البيان الأول + أضلاع البيان الثاني ونفس الرؤوس

$G = G_1 \oplus G_2$

البيانات الإيزومورفيان (المتماثلان):

نقول عن البيانين G_1, G_2 انهما ايزومورفيان (متماثلان) اذا وجد تقابل Φ (فاي) بين مجموعتي الرؤوس $V(G_1)$ و $V(G_2)$ يحافظ على التجاور وهذا يعني أنه من أجل أي رأسين $u, v \in V(G_1)$ تحقق الشرط التالي: اذا كان $e = uv \in E(G_1)$ فعندئذ $\Phi(u)\Phi(v) \in E(G_2)$ (أي صورة أي رأسين بينهما ضلع) عندئذ نقول أن G_1 يماثل G_2 ونكتب

$G_1 \cong G_2$

مثال: لنأخذ البيانين

G_1

G_2

التقابل

$\Phi : V(G_1) \longrightarrow V(G_2)$ فاي

يعرف بالشكل التالي:

$\Phi(v_1) = v_1$, $\Phi(v_2) = v_4$

$\Phi(v_3) = v_5$, $\Phi(v_4) = v_6$, $\Phi(v_5) = v_7$

$\Phi(v_6) = v_8$, $\Phi(v_7) = v_3$, $\Phi(v_8) = v_2$

يحافظ على التجاور

أي هو ضلع في G_1 : $e = v_1v_2 \in E(G_1)$

$\Rightarrow$

$\Phi(v_1)\Phi(v_2) = v_1v_4 \in E(G_2)$

$e = v_2v_3 \in E(G_1) \Rightarrow \Phi(v_2)\Phi(v_3) = v_4v_5 \in E(G_2)$

$e = v_5v_6 \in E(G_1) \Rightarrow \phi(v_5)\phi(v_6) = v_7v_8 \in E(G_2)$

$e = v_7v_8 \in E(G_1) \Rightarrow \phi(v_7)\phi(v_8) = v_3v_2 \in E(G_2)$

وبالتالي $G_1 \cong G_2$

• البيانات المتطابقة:

نقول عن البيانين G_1 , G_2 أنهما متطابقين إذا كان $V(G_1)=V(G_2)$ و $E(G_1)=E(G_2)$

• البيانات والمصفوفات:

يمكن في الواقع استخدام المصفوفات لتمثيل البيانات وذلك لتوضيح العلاقة بين الرؤوس وكذلك العلاقة بين الأضلاع وبين الرؤوس والأضلاع

• ليكن لدينا البيان $G(V,E)$ له مجموعة الرؤوس $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$

ومجموعة الأضلاع $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$

لنعرف المصفوفات التالية

1- مصفوفة التجاور: هي مصفوفة مربعة من القياس $p \times p$ ومعرفة بالشكل:

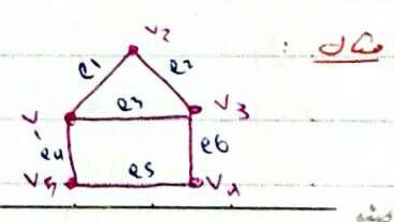
$A[G] = [a_{ij}]$

وعناصرها تعطى بالشكل

$A[G] = \begin{cases} 0 & ; \ i = j \\ \text{عدد الأضلاع التي تصل بين الرأسين } v_i, v_j & ; \ i \neq j \end{cases}$

(عناصر القطر الرئيسي أصفار)

مثال:



نعرف المصفوفة A بالشكل:

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

• وهذه المصفوفة هي مصفوفة متناظرة وبالتالي لكل بيان G مصفوفة مربعة متناظرة عناصرها أعداد صحيحة غير سالبة وبالتالي كل مصفوفة مربعة متناظرة من الأعداد الصحيحة غير السالبة تكون مصفوفة تجاور بيان ما.

• إذا كان البيان بسيط عندئذٍ عناصر المصفوفة $A[G]$ مكونة من الأعداد 1 أو 0

2) مصفوفة التجاور للأضلاع:

مصفوفة مربعة من القياس $q \times q$ ومعرفة بالشكل

$M[G] = [m_{ij}]$

وعناصرها تعطى بالشكل:

$M[G] = \begin{cases} 1 & ; \ \text{إذا كان الضلعان } e_i, e_j \text{ متجاوران} \\ 0 & ; \ \text{إذا كان الضلعان } e_i, e_j \text{ غير متجاورين} \end{cases}$

مثال:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
e_1	0	1	1	1	0	0
e_2	1	0	1	0	0	1
e_3	1	1	0	1	0	1
e_4	1	0	1	0	1	0
e_5	0	0	0	1	0	1
e_6	0	1	1	0	1	0

($M[G]=$ the matrix above)

• هذه المصفوفة هي مصفوفة متناظرة .

3)- مصفوفة التقاطع :

هي مصفوفة مستطيلة من سعة $p \times q$ ومعرفة بالشكل .

$B[G] = [b_{ij}]$

وعناصرها تعطى بالشكل :

$B[G] = \begin{cases} 1 & \text{اذا كان الرأس } v_i \text{ يقع على الضلع } e_j \\ 0 & \text{اذا كان الرأس } v_i \text{ لا يقع على الضلع } e_j \end{cases}$

مثال :

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
v_1	1	0	1	1	0	0
v_2	1	1	0	0	0	0
v_3	0	1	1	0	0	1
v_4	0	0	0	0	1	1
v_5	0	0	0	1	1	0

($B[G]=$ the matrix above)

ملاحظة : اذا كان البيان G لا يحتوي على لفات (عروات) فإن :

• مجموع عناصر كل عمود = 2 لان كل ضلع يقع على رأسين

• ومجموع عناصر كل سطر = درجة الرأس الموافق لذلك السطر . (يعني لشكل المصفوفة $B[G]$)

4)- مصفوفة الدرجة : هي مصفوفة مربعة من سعة $p \times p$ ومعرفة بالشكل :

$C[G] = [c_{ij}]$

وعناصرها تعطى بالشكل :

$C[G] = \begin{cases} \text{درجة الرأس} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

مثال :

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	3	0	0	0	0
v_2	0	2	0	0	0
v_3	0	0	3	0	0
v_4	0	0	0	2	0
v_5	0	0	0	0	2

($C[G]=$ the matrix above)

ملاحظة: اذا كان $G(V,E)$ بيان غير فارغ عندئذ

$$B \times B^{+} = A + C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(B^{+}: ومنقول)

بالاعتماد نثبت هذه المصفوفة اي نوجد $B \times B^{+}$ ونوجد $A+C$

• نلاحظ ما يلي:

[1]- العنصر (i,i) تمثل عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة $B \times B^{+}$ أو $A+C$ هو درجة الرأس V_i في البيان G

[2]- العنصر $j \neq i$ أي بقية العناصر نميز حالتين:

أ- اذا كان الرأسين V_i , V_j متجاوران في البيان G عندئذ يوجد ضلع فان العنصر $(i,j)=1$ موجود في المصفوفة $B \times B^{+}$

ب- اذا كان الرأسين V_i , V_j غير متجاورين في البيان G عندئذ العنصر (المدخل) $(i,j) = 0$ في المصفوفة $B \times B^{+}$

• **البيان منقول البيان:**

ليكن لدينا البيان $G(V,E)$ له مجموعة الأضلاع

$E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$

نضع مكان كل ضلع e_i برأس V_i فنحصل على الرؤوس

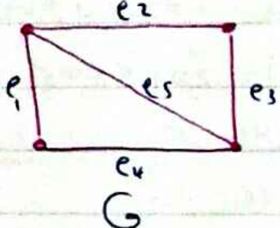
$V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_q\}$

والتي هي رؤوس لبيان جديد H يسمى منقول البيان G.

• يكون الرأسان V_i , V_j متجاوران في H اذا وفقط اذا كان e_i , e_j متجاوران في G.

ونكتب $H = L(G)$

مثال:



ليكن لدينا البيان

